Correction TD n 6

May 17, 2019

Exercice 1 :

$C_1 : f(x,y) = 2\,x^2 + 4\,x\,y + 5\,y^2 - 10\,x - 1 = 0$

La partie quadratique de l'équation C_1 est $q(x,y) = 2\,x^2 + 4\,x\,y + 5\,y^2$ de matrice associée

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

A a un déterminant $det(A) = 6 > 0$ et ses valeurs propres sont $1, 6$, donc la conique et du genre ellipse (le vide, un point ou une ellipse). Pour expliciter son type, recherchons l'équation réduite de cette conique dans un repère adapté.

Considérons la base orthonormée des vecteurs propres $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ainsi que la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, donnée par

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

L'équation de la quadrique en coordonnées x', y' dans le repère $(O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$ est alors donnée par

$$(x', y').P^tAP.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-10, 0).P.\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui donne après simplification

$$x'^2 + 6\,y'^2 + 4\,\sqrt{5}\,x' - 2\,\sqrt{5}\,y' - 1 = 0$$

On peut réécrire ça sous forme canonique

$$(x' + 2\,\sqrt{5})^2 + 6\,(y' - \frac{\sqrt{5}}{6})^2 - 20 - \frac{5}{6} - 1$$

Il suffit alors d'effectuer un changement de variable (translation de repère) pour retrouver une équation réduite de la forme

$$x''^2 + 6\,y''^2 = \frac{131}{6}$$

Cette conique est donc une ellipse. Pour obtenir les coordonnées de son centre dans le repère canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ on peut procéder de deux manière différentes :

1. Le centre de la conique est solution du système définit par les dérivées partielle de celle-ci

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = & 4\,x + 4\,y - 10 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = & 10\,y + 4\,x = 0 \end{cases}$$

   Donc le centre de la conique c'est $(x, y) = (\frac{25}{6}, -\frac{5}{3})$

2. On sait que le centre de la conique dans le repère $(O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$ a pour coordonnées $(-2\sqrt{5}, \frac{\sqrt{5}}{6})$. Pour retrouver ses coordonnées dans le repère canonique il suffit de multiplier le vecteur associé par l'inverse de la matrice de changement de base.

$$P^t. \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{6} \end{pmatrix}$$

$C_2 : 3\,x^2 - 4\,x\,y + 2\,y - 1 = 0$

La partie quadratique de l'équation C_2 est $q(x, y) = 3\,x^2 - 4\,x\,y$ de matrice associée

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

A a un déterminant $det(A) = -4 < 0$ et deux valeurs propres $-1, 4$, donc la conique et du genre hyperbole. Pour expliciter son type, recherchons l'équation réduite de cette conique dans un repère adapté.

Considérons la base orthonormée des vecteurs propres $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ainsi que la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, donnée par

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

L'équation de la quadrique en coordonnées x', y' dans le repère $O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est alors donnée par

$$(x', y').P^tAP. \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (0, 2).P. \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui donne après simplification

$$-x'^2 + 4\,y'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}\,x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\,y' - 1 = 0$$

On peut rééecrire ça sous forme canonique

$$-(x' - \frac{2}{\sqrt{5}})^2 + 4\,(y' + \frac{1}{4\sqrt{5}})^2 - \frac{4}{5} - \frac{1}{20} - 1$$

Il suffit alors d'effectuer un changement de variable (translation de repère) pour retrouver une équation réduite de la forme

$$-x''^2 + 4\,y''^2 = \frac{37}{20}$$

Cette conique est donc une hyperbole de centre $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ dans le repère canonique $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

$C_3 : x^2 + 4\,x\,y + 4\,y^2 + x - 4 = 0$

La partie quadratique de l'équation C_3 est $q(x,y) = x^2 + 4\,x\,y + 4\,y^2$ de matrice associée

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 1, de valeurs propres $0, 5$. En procédant comme précédemment on obtient une équation réduite de la forme

$$5\,(y' + \frac{1}{10\sqrt{5}})^2 = \frac{2}{\sqrt{5}}\,(x' - \frac{2001\sqrt{5}}{1000})$$

Cette conique est donc une parabole.

Exercice 2 :

Il suffit d'observer que l'équation $(a\,x + b\,y + c)\,(a'\,x + b'\,y + c') = d$ se réécrit sous la forme

$$\left(\frac{a\,x + b\,y + c + a'\,x + b'\,y + c'}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\,x + b\,y + c - a'\,x - b'\,y - c'}{2}\right)^2 = d$$

Après le changement de variables $\{x' = a\,x + b\,y + c + a'\,x + b'\,y + c', y' = a\,x + b\,y + c - a'\,x - b'\,y - c'\}$, on obtient bien l'équation d'une hyperbole

$$\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{2^2} = d$$

Exercice 3 :

On peut utiliser une paramétrisation de l'ellipse dans un repère centré en O. Dans ce repère, l'ellipse admet une représentation paramétrée de la forme

$$\begin{cases} x(t) & = & a\,cos\,t \\ y(t) & = & b\,sin\,t \end{cases}$$

On suppose que M a pour coordonnées $(a\,cos\,\phi, b\,sin\,\phi)$ et que P a pour coordonnées $(a\,cos\,\theta, b\,sin\,\theta)$. Sachant que la tangente à ξ en P est parallèle à (OM), on va chercher une relation entre ϕ et θ.

Pour cela, on remarque que la tangente à ξ en P a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x'(\theta) \\ y'(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin\,\theta \\ b\,cos\,\theta \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires, et donc leur déterminant est nul. On trouve :

$$a\,b\,cos\,\phi\,cos\,\theta + a\,b\,sin\,\phi\,sin\,\theta = a\,b\,cos(\phi - \theta) = 0.$$

En particulier, $\phi = \theta + \frac{\pi}{2} [\pi]$. Calculons maintenant l'aire du trianle MOP. Elle vaut :

$$\frac{1}{2} |det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})| = \frac{1}{2} |a\, b\, cos\, \phi\, sin\, \theta - a\, b\, sin\, \phi\, cos\, \theta| = \frac{a\, b}{2}\, |sin(\phi - \theta)| = \frac{a\, b}{2}$$

puisque $\phi - \theta = \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Exercice 4 :

Une demonstration est donnée ici

Exercice 5 :

$Q_1 : x\,y + 3\,x\,z + z$

On note

$$q(x, y, z) = x\,y + 3\,x\,z$$

la partie quadratique dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2, de valeurs propres égales à 0, $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ et $-\frac{1}{2}\sqrt{10}$. La quadrique associée est donc soit un paraboloïde hyperbolique, un cylindre hyperbolique ou deux plans sécants. Recherchons l'équation réduite de cette quadrique dans un repère adapté.

Considérons la base orthonormée des vecteurs propres $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ainsi que la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{3}{10}\sqrt{10} & \frac{1}{10}\sqrt{5} & \frac{1}{10}\sqrt{5} \\ \frac{1}{10}\sqrt{10} & \frac{3}{10}\sqrt{5} & \frac{3}{10}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

L'équation de la quadrique en coordonnées x', y', z' dans le repère $O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est alors donnée par

$$(x', y', z').P^t AP. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (0, 0, 1).P. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui donne après simplification

$$\frac{\sqrt{10}}{2}\,x'^2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\,y'^2 + \frac{\sqrt{10}}{10}\,x' + \frac{3\sqrt{5}}{10}\,y' + \frac{3\sqrt{5}}{10}\,z' = 0$$

Il suffit alors de l'écrire sous forme canonique et d'effectuer un changement de variable pour retrouver une équation réduite de la forme

$$\frac{\sqrt{10}}{2}\,x''^2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\,y''^2 = -\frac{3\sqrt{5}}{10}\,z''$$

Cette quadrique est donc un paraboloïde hyperbolique.

$Q_2 : x\,y + y\,z + z\,x + 2\,y + 1 = 0$

On note

$$q(x, y, z) = x\,y + y\,z + z\,x$$

la partie quadratique dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 3, de valeurs propres égales à $1, -\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. C'est donc soit un hyperboloïde à une ou deux nappes, ou un cône. Recherchons l'équation réduite de cette quadrique dans un repère adapté.

Considérons la base orthonormée des vecteurs propres $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ainsi que la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donnée par

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation de la quadrique en coordonnées x', y', z' dans le repère $O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est alors donnée par

$$(x', y', z').P^t AP. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (0, 2, 0).P. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 1 = 0$$

Ce qui donne après simplification

$$x'^2 - \frac{1}{2}\,y'^2 - \frac{1}{2}\,z'^2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\,x' + \sqrt{2}\,z' + 1 = 0$$

Sous forme canonique et après changement de variable, l'équation précédente s'écrit donc comme

$$x''^2 - \frac{1}{2}\,y''^2 - \frac{1}{2}\,z''^2 = \nu$$

avec $\nu > 0$ (à vérifier). La quadrique est donc un hyperboloïde à deux nappes.

$Q_3 : 2\,x^2 + y^2 + 2\,z^2 + 2\,x\,z - 5$

On note

$$q(x, y, z) = 2\,x^2 + y^2 + 2\,z^2 + 2\,x\,z$$

la partie quadratique dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 3 de valeurs propres égales à $3, 1$ et 1. C'est donc soit un ellipsoïde, un point ou le vide. Recherchons l'équation réduite de cette quadrique dans un repère adapté.

Considérons la base orthonormée des vecteurs propres $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ainsi que la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donnée par

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

L'équation de la quadrique en coordonnées x', y', z' dans le repère $O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est alors donnée par

$$(x', y', z').P^t AP. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} - 5 = 0$$

Ce qui donne

$$3\,x'^2 + y'^2 + z'^2 = 5$$

La quadrique est donc un ellipsoïde.

$Q_4 : x^2 + y^2 + z^2 - 4\,x\,y - 4\,x\,z - 4\,y\,z - 4\,z - 4\,y + 2\,x + 1$

On note

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4\,x\,y - 4\,x\,z - 4\,y\,z$$

la partie quadratique dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 3, de valeurs propres égales à $3, 3$ et -3. C'est donc soit un hyperboloïde à une ou deux nappes ou un cône.

Considérons la base orthonormée des vecteurs propres $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ainsi que la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$, donnée par

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

L'équation de la quadrique en coordonnées x', y', z' dans le repère $(O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}))$ est alors donnée par

$$(x', y', z').P^t AP. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + (2, -4, -4).P. \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + 1 = 0$$

Ce qui donne après simplification

$$3\,x'^2 + 3\,y'^2 - 3\,z'^2 - 3\,\sqrt{2}\,x' - 3\,\sqrt{2}\,y' - 2\,\sqrt{3}\,z' + 1 = 0$$

Sous forme canonique et après changement de variable, l'équation précédente s'écrit donc comme

$$3\,x''^2 + 3\,y''^2 - 3\,z''^2 = -1$$

La quadrique est donc un hyperboloïde à deux nappes.

Exercice 6 :

Soit la quadrique d'équation $z = x\,y$. Sa partie quadratique a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 2 et de valeurs propres égales à $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. C'est donc soit un un paraboloïde hyperbolique, un cylindre hyperbolique ou deux plans sécants. Dans le repère des vecteurs propres $(O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}))$ cette quadrique à pour équation

$$\frac{1}{2}\,y''^2 - \frac{1}{2}\,z''^2 = x''$$

C'est donc un paraboloïde hyperbolique. Son intersection avec le plan $z = 0$ donne une équation de la forme

$$\frac{1}{2}\,y''^2 = x''$$

C'est donc une parabole. On peut également observer que son intersection avec le plan d'équation $x = 0$ donne deux droite sécantes de la forme

$$\frac{1}{2}\,y''^2 - \frac{1}{2}\,z''^2 = 0$$

Exercice 7 :

Les quadriques dont la forme quadratique est non dégénérée (rang égal à 3) sont

- Ellipsoïde, un point, le vide (trois valeurs propres de même signe)
- un hyperboloïde à une ou deux nappes, un cône (deux valeurs propres de même signe et la troisième d'un autre signe)

Toute ces quadriques ont une équation dans un repère adapté $(O, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}))$ de la forme

$$a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 + d = 0$$

Cette équation est invariante par changement de variable $(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. Donc la quadrique est symétrique par rapport au point O.

On peut calculer le centre de symétrie de la quadrique en la mettant sous forme réduite ou en résolvant le système suivant

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

ou $f(x, y, z)$ désigne le polynôme définissant la quadrique.