Correction TD n 5

May 19, 2019

Exercice 7 :

1. Une isométrie affine qui possède plus d'un point fixe est soit l'identité soit une réflexion orthogonale. Puisque il s'agit d'une isométrie directe, c'est donc l'identité.

2. **Existence :** On considère la translation affine de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ que l'on note $\tau_{\overrightarrow{AA'}}$. Soit B'' l'image du point B par cette translation. Par définition de la translation, on a $AB = A'B''$" (Les points A, B, A', B'' forment un parallélogramme). On définit la rotation affine $R_{A'}$ de centre A' et d'angle $\widehat{B''A'B'}$. Par l'hypothèse $AB = A'B'$, on a donc $A'B'' = A'B'$. Donc l'image de B'' par la rotation $R_{A'}$ est le point B'. L'isométrie affine g que l'on recherche est la composition de la translation et de la rotation, i.e.,

$$g = R_{A'} \circ \tau_{\overrightarrow{AA'}}$$

On peut aisément vérifier que l'image de A (resp. B) est A' (resp. B').

Unicité Supposant qu'il existe une autre isométrie h vérifiant les même hypothèses. Il suffit de démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ l'on ai $g(x) = h(x)$. Pour cela, il suffit d'écrire le vecteur $\overrightarrow{Ox}$ dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ puis de calculer son image par les deux isométrie h et g. En utilisant les propriétés de linéarité de g et h on retrouve le même résultat.

Pour décrire l'isométrie envoyant les points $A = (-1, 2), B = (3, 1)$ sur les points $A' = (2, 3), B' = (1, -1)$ il suffit de calculer le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ ainsi que l'angle $\theta = \widehat{\tau_{\overrightarrow{AA'}}(B')A'B'}$ puis de calculer la composée $R_{A'} \circ \tau_{\overrightarrow{AA'}}$.

Exercice 8 :

1. On commence par calculer l'expression des deux réflexions orthogonales avant de calculer leur composée. Soit f une transformation affine et $\overrightarrow{f}$ la transformation vectorielle associée à f. Pour tout point M, on rappelle que

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM})$$

La réflexion orthogonale vectorielle associé à la réflexion par rapport à D_1 correspond à la réflexion relativement au vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Elle est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, l'image du point $O = (0,0)$ par la réflexion relativement à D_1 est $(1,1)$. Par conséquent, pour tout point $M = (x,y)$, $f(M) = (x',y') = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Donc l'expression de la réflexion orthogonale relativement à D_1 est donnée par $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$

En procédant de la même manière, on obtient l'expression de la réflexion orthogonale relativement à D_2 : $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$.

En composant les deux réflexions, on obtient la transformation affine suivante $\begin{cases} x' = -x + 1 \\ y' = -y + 1 \end{cases}$. La transformation vectorielle correspondante est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. C'est donc une rotation. Il reste à déterminer le centre de cette rotation. Pour cela, il suffit de calculer le seul point fixe, solution du système $\begin{cases} x = -x + 1 \\ y = -y + 1 \end{cases}$. Le centre de la rotation est donc $p = (1/2, 1/2)$. On peut remarquer qu'il s'agit du point d'intersection des deux droites D_1 et D_2.

2. Même démarche que la question précédente. Ici, le fait que les droites soient parallèles, le résultat attendu est une translation.

Exercice 9 :

Il est demandé de faire d'abord un dessin pour mieux visualiser. Soit M un point quelconque du plan. Soit M' son image par la symétrie centrale par rapport à A. Soit M'' l'image de M' par la symétrie centrale par rapport à B. On a par définition de la symétrie que $\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{AM'}$ de même que $\overrightarrow{M'M''} = 2\,\overrightarrow{M'B}$. Par conséquent $\overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\,\overrightarrow{AM'} + 2\,\overrightarrow{M'B}$ et donc $\overrightarrow{MM''} = 2\,\overrightarrow{AB}$. La composée des deux symétrie est donc un translation de vecteur $2\,\overrightarrow{AB}$. Même chose dans l'espace.

Exercice 10 : Soit P le milieu du segment $[M'M'']$, donc $\overrightarrow{M''P} = \overrightarrow{PM'}$. Pour montrer que P est indépendant de M il suffit de montrer qu'il ne dépend que des points A et B. Par définition des rotations affines de centre A et B on a $\overrightarrow{AM'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{AM}$ ainsi que $\overrightarrow{BM''} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{BM}$. D'autre part, $\overrightarrow{M''P} = \overrightarrow{PM'}$ donne $\overrightarrow{M''B} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM'}$. Il suffit alors de remplacer $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{M''B}$ par leurs valeurs et d'utiliser Chasles pour conclure.

Exercice 11 : Soit $M = (x, 0)$ un point de l'axe des abscisses. On veut trouver la valeur de x qui minimise la somme $AM + BM$, ou de manière équivalente la somme $AM^2 + BM^2$. En calculant les vecteurs $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}$ ainsi que leur normes respectives, on obtient que $AM^2 + BM^2 = 2\,x^2 + 13$. Il suffit donc de chercher x qui correspond au minimum de la parabole d'équation $f(x) = 2\,x^2 + 13$. Par dérivation, on obtient $x = 0$. Donc le chemin le plus court entre A et B doit passer par le point $(0, 0)$.

Exercice 13 :

1. L'application vectorielle associée à l'application affine f_1 a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de déterminant 1, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle. Ainsi f_1 est une isométrie affine.

   Calculons ses points fixes. Ces points sont solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - y \\ y = x \end{array} \right.$
   Ce système a pour seule solution le point $(1, 1)$. Il s'agit donc d'une rotation affine. En reprenant la matrice de la rotation vectorielle associée, on trouve par les formules usuelles que l'angle de rotation est $\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, f_1 est une rotation affine de centre $(1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2. L'application vectorielle associée à l'application affine f_2 a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de déterminant -1, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle (réflexion orthogonale). Ainsi f_2 est une isométrie affine.

   Pour la décrire, calculons ses points fixes. Ces points sont solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x = y + 2 \\ y = x - 2 \end{array} \right.$. Les solutions de ce système correspondent à la droite d'équation $y - x + 2 = 0$. f_2 est donc une réflexion orthogonale par rapport à la droite $y - x + 2 = 0$.

3. L'application vectorielle associée à l'application affine f_3 a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de déterminant -1, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle (réflexion orthogonale). Ainsi f_3 est une isométrie affine.

   Pour la décrire, calculons ses points fixes. Ces points sont solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - y \\ y = -x \end{array} \right.$. Ce système n'admet pas de solutions, f_3 n'a donc aucun point fixe. Par conséquent, f_3 est soit une translation, soit une symétrie glissée (composée commutative d'une réflexion orthogonale et d'une translation). Puisque la matrice associée n'est pas l'identité, il s'agit donc d'une symétrie glissée.

   Pour la décrire, calculons le vecteur $\overrightarrow{v}$ de la réflexion orthogonale vectorielle associée de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est le vecteur qui engendre $Ker(A - I)$. Donc $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On cherche maintenant les points M tels que $\overrightarrow{MM'} // \overrightarrow{v}$. C'est à dire $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} 2 - x - y \\ -x - y \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ceci implique que $2 - x - y = x + y$ et donc que $x + y - 1 = 0$. L'axe de la symétrie glissée est ainsi la droite $x + y - 1 = 0$. Pour trouver le vecteur de translation, il suffit de prendre un point quelconque M (par exemple $(1, 0)$) de cette droite et de calculer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$. Ceci donne le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi f_3 est la composée de la réflexion orthogonale par rapport à la droite $x + y - 1 = 0$ et de la translation de vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. f_4 est une isométrie par les même arguments que précédemment. Le seul point fixe est le point $(1, 0)$, c'est donc une rotation affine. La rotation vectorielle associée a pour matrice $-Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. f_4 est donc une symétrie centrale par rapport au point $(1, 0)$.

Exercice 14 :

1. L'application vectorielle associée a notre application affine f_3 a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice de déterminant 1, il s'agit donc d'une isométrie vectorielle (rotation). Ainsi f_1 est une isométrie affine.

   Les points fixes de f_1 sont solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - y \\ y = 2 - z \\ z = 2 + x \end{array} \right.$. Ce système n'admet aucune solution, donc f_1 n'a pas de points fixes. Puisque la matrice associée correspond à une rotation vectorielle, f_1 est donc un vissage. Commençons par rechercher les caractéristiques de cette rotation vectorielle.

L'axe de rotation est dirigé par un vecteur $\overrightarrow{v}$ engendrant $Ker(A-I)$. En écrivant le système associé, on obtient que $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par les formules usuelles, on trouve que l'angle de rotation est égal à $\frac{3\pi}{2}$.

L'axe de vissage est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MM'} // \overrightarrow{v}$. C'est à dire $\overrightarrow{MM'} = \begin{pmatrix} 2-x-y \\ 2-z-y \\ 2+x-z \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ceci donne le système le système suivant $\left\{ \begin{array}{l} 2-x-y = 2+x-z \\ 2-y-x = z+y-2 \end{array} \right.$. Donc l'axe de vissage est donné par la droite affine $\mathcal{D}$ d'équations $\left\{ \begin{array}{l} 2x+y-z=0 \\ 2y+x+z-4=0 \end{array} \right.$. Il reste à choisir un point M quelconque de cette droite, par exemple $M = (0, 4/3, 4/3)$.

Ainsi f_1 est un vissage d'axe orienté $(M, \overrightarrow{v})$, d'angle $\frac{3\pi}{2}$ et de vecteur de translation $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. L'ensemble des points fixes de f_2 est une droite affine $\mathcal{D}$ donnée par les équations $\left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ x-z-2=0 \end{array} \right.$. f_2 est donc une rotation affine. La matrice associée à la rotation vectorielle correspondant à f_2 est $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Il suffit donc de décrire cette rotation vectorielle. L'axe de rotation est dirigé par un vecteur $\overrightarrow{v}$ engendrant $Ker(A-I)$. En écrivant le système associé, on obtient que $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par les formules usuelles, on trouve que l'angle de rotation est égal à π.

   f_2 est donc une rotation d'axe orienté la droite $\mathcal{D}$ et d'angle π. C'est aussi une symétrie par rapport à cette droite.

3. Par un calcul simple, on observe que f_3 ne possède pas de points fixes. Puisque la matrice de l'isométrie vectorielle associée, donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est de déterminant 1 (rotation), f_3 est donc un vissage. Pour retrouver l'axe, l'angle et le vecteur de translation, on procède comme pour la question 1.