AIL'12 Aide mémoire : Logique propositionnelle

Formules

Les formules de la logique propositionnelle sont définies par la grammaire suivante :

$$\varphi ::\equiv A \mid \mathbf{true} \mid \mathbf{false} \mid \neg\varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \rightarrow \varphi \mid \varphi \leftrightarrow \varphi,$$

où A est un symbole d'un proposition , **true** et **false** sont deux formules constantes et $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$ sont les opérateurs logiques de la négation, de la disjonction, de la conjonction, de l'implication et de l'équivalence respectivement.

Tables de vérité

La sémantique des formules est définie par l'extension de la table de vérité suivante.

A	B	**true**	**false**	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0	0

La formule φ est :
- *satisfaisable* si φ est vraie dans une des lignes de sa table de vérité.
- *valide*, ou une *tautologie*, si φ est vraie dans toutes les lignes.
- *invalide*, ou une *contradiction*, si φ est fausse dans toutes les lignes.

Une formule φ est *une conséquence logique* ou *une implication logique* d'un ensemble de formules U, écrit $U \models \varphi$, si φ est vraie dans toutes les lignes où toutes les formules de U sont vraies.

Calcul propositionnel

Quelques équivalences utiles :

$$A \wedge \neg A \equiv \mathbf{false}, \tag{1}$$
$$A \vee \mathbf{true} \equiv \mathbf{true}, \tag{2}$$
$$A \wedge \mathbf{true} \equiv A, \tag{3}$$
$$A \vee \mathbf{false} \equiv A, \tag{4}$$
$$A \wedge \mathbf{false} \equiv \mathbf{false}, \tag{5}$$
$$A \wedge A \equiv A, \tag{6}$$
$$A \vee A \equiv A, \tag{7}$$
$$A \wedge B \equiv B \wedge A, \tag{8}$$
$$A \vee B \equiv B \vee A, \tag{9}$$
$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), \tag{10}$$
$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), \tag{11}$$
$$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C) \tag{12}$$
$$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \tag{13}$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B, \tag{14}$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \tag{15}$$
$$\neg\neg A \equiv A \tag{16}$$
$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \tag{17}$$
$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B \tag{18}$$

Systèmes de preuve

Les règles du système de la déduction naturelle :

$$\frac{}{U \vdash A \vee \neg A} \quad (\textsc{Tiers Exclu})$$

$$\frac{}{U \cup \{A\} \vdash A} \quad (\textsc{Axiom + Affaiblisement})$$

$$\frac{U \vdash A \to B \qquad U \vdash \neg B}{U \vdash \neg A} \quad (\textsc{Reduction ad absurdum})$$

$$\frac{U \vdash A \qquad U \vdash A \to B}{U \vdash B} \quad (\textsc{Modus Ponens})$$

$$\frac{U \cup \{A\} \vdash B}{U \vdash A \to B} \quad (\textsc{Déduction})$$

$$\frac{U \vdash A \vee B \qquad U \vdash A \to C \qquad U \vdash B \to C}{U \vdash C} \quad (\vee\text{-}\textsc{Elim})$$

$$\frac{U \vdash A}{U \vdash A \vee B} \quad (\vee\text{-}\textsc{Intro})$$

$$\frac{U \vdash A \qquad U \vdash B}{U \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\text{-}\textsc{Intro})$$

$$\frac{U \vdash A \wedge B}{U \vdash A} \quad (\wedge\text{-}\textsc{Elim})$$

$$\frac{U \vdash \neg\neg A}{U \vdash A} \quad \frac{U \vdash A}{U \vdash \neg\neg A} \quad (\textsc{Double négation})$$

$$\frac{U \vdash \neg(A \vee B)}{U \vdash \neg A \wedge \neg B} \quad \frac{U \vdash \neg A \wedge \neg B}{U \vdash \neg(A \vee B)} \quad (\vee\text{-}\textsc{De Morgan})$$

$$\frac{U \vdash \neg(A \wedge B)}{U \vdash \neg A \vee \neg B} \quad \frac{U \vdash \neg A \vee \neg B}{U \vdash \neg(A \wedge B)} \quad (\wedge\text{-}\textsc{De Morgan})$$

$$\frac{U \vdash \neg A \vee B}{U \vdash A \to B} \quad \frac{U \vdash A \to B}{U \vdash \neg A \vee B} \quad (\to\text{-}\textsc{Définition})$$