Intelligence Artificielle par la Logique (AIL'11)

TD 9 : Logique de premier ordre

Exercice 1. Proposer des signatures qui permettent de modéliser des connaissances dans les situations suivantes :

1. (Σ_0) Dans un groupe composée de filles et de garçons on veut parler des relations et des sentiments suivantes : l'amour, partage des gâteaux et le bonheur ; en plus il y a au moins une "Barbie" et un "Ken".
2. (Σ_1) Le réseau des chemin en fer (e.g. SNCF) avec le villes connectées avec les trains ; en plus, ce réseau a un "centre" (comme Paris en France) et certains villes ont des aéroports ;
3. (Σ_2) Le système d'éducation supérieure avec des étudiants qui suivent des cours enseignés par des profs ; les profs sont partagé en deux groupes : PR et MdC ; en plus tous les profs peuvent prendre un congé sabbatique.

Exercice 2. Pour toute signature de l'exercice précédent donner au moins trois interprétations.

Exercice 3. Exprimer des affirmations suivantes avec la logique de premier ordre :

- (Σ_0) *Barbie et Ken* :
  1. Barbie est une fille ;
  2. Ken est un graçon ;
  3. Tout le monde aime Ken ;
  4. Tout garçon aime Barbie ;
  5. Aucune fille n'aime pas Barbie ;
  6. Barbie ne partage de gâteau avec personne ;
  7. Ken partage des gâteau avec toutes les filles ;
  8. On est heureux(se) si on partage des gâteaux avec tout le monde ;
  9. Une fille n'est pas heureuse s'il est amoureux d'un garçon qui est amoureux d'une autre personne ;
  10. Un garçon n'est pas heureux s'il est amoureux d'une fille qui aime un autre garçon.
- (Σ_1) *SNCF*
  1. Le centre est une ville avec un aéroport ;
  2. Pour toute connexion dans un sens il existe une connexion dans le sens envers ;
  3. Pas toute paire de villes est connectée ;
  4. Le centre est connecté de manière directe avec toute autre ville ;
  5. Pour prendre un avion il faut prendre au plus un train (ou même aucun train) ;
- (Σ_2) *La fac*
  1. L'ensemble d'étudiants et l'ensemble de profs sont disjoints ;
  2. Tout étudiant suit un cours ;
  3. Tout étudiant suit au moins deux cours ;
  4. Tout PR enseigne au moins un cours ;
  5. Tout MdC enseigne au moins trois cours ;
  6. Tout prof enseigne un cours sauf s'il est en congé sabbatique ;
  7. Il existe un PR qui enseigne tous les étudiants (mais pas forcement en même cours) ;
  8. Il n'existe pas de MdC qui enseigne tous les étudiants ;
  9. Pour tout MdC il existe toujours un étudiant pas enseigné par ce MdC.

Exercice 4. Évaluer toutes les formules de l'exercice précédente dans les instances de l'exercice 2.

Exercice 5. Considérons une signature $\Sigma_{\mathbb{N}}$ des nombres naturels contenant deux constates : **0** et **1** avec deux opérations principales : l'addition $plus^{(3)}$ et la multiplication $mult^{(3)}$. Exprimer les affirmations suivantes :

1. L'addition est associative.
2. Idem pour la multiplication.
3. Zéro est l'élément neutre de l'addition.
4. Pour tout élément il existe un élément symétrique par rapport de l'addition.
5. L'addition est commutative.
6. Idem pour la multiplication.
7. Pour tout élément différent de zéro il existe un élément symétrique par rapport de la multiplication.
8. La multiplication est distributive pour l'addition.
9. Il existe qu'un seul nombre égal à zéro.
10. La somme de deux nombres est inférieure ou égale à leur multiplication.
11. Un nombre est inférieur ou égal à son carré.

Construire deux modèles de l'arithmétique modulaire $\mathbb{Z}_3$ et $\mathbb{Z}_4$ et vérifier la satisfaisabilité de toutes les formules.

Exercice 6. Prouver ou désapprouver la satisfaisabilité et la validité des formules suivantes

1. $(\forall x.\ \forall y.\ p(x,y)) \to (\forall x.\ \forall y.\ p(y,x))$,
2. $(\forall x.\ \exists y.\ p(x,y)) \to (\exists x.\ \forall y.\ p(x,y))$,
3. $(\forall x.\ p(x)) \to (\exists x.\ \neg r(x) \vee p(x))$,
4. $((\exists x.\ p(x)) \wedge (\exists x.\ r(x))) \to (\exists x.\ p(x) \wedge r(x))$,
5. $(\forall x.\ p(x) \vee q(x)) \to ((\forall x.\ p(x)) \vee (\forall x.\ q(x)))$,
6. $(\neg \forall x.\ p(x) \to q(x)) \leftrightarrow (\exists x.\ p(x) \wedge \neg q(x))$,
7. $((\forall x.\ p(x)) \wedge (\forall x. p(x) \to q(x))) \to \forall x. q(x)$,
8. $((\forall x.\ p(x)) \to (\forall x.\ q(x))) \to (\forall x.\ p(x) \to q(x))$,
9. $(\forall x.\ p \to q(x)) \leftrightarrow (p \to \forall x. q(x))$,
10. $(\forall x.\ (p(x) \to q)) \leftrightarrow ((\exists x.\ p(x)) \to q)$,
11. $(\exists x.\ p(x) \to q(x)) \leftrightarrow ((\forall x.\ p(x)) \to (\exists x.\ q(x)))$,
12. $(\forall x.\ p(x)) \to (\exists x.\ p(x))$,
13. $(\forall x.\ p(x) \to q(x)) \to ((\forall x.\ p(x)) \to (\forall x.\ p(x)))$,
14. $(\forall x.\ p(x) \vee \forall x.\ q(x)) \to (\forall x.\ p(x) \vee q(x))$,
15. $(\exists x.\ p(x) \wedge q(x)) \to (\exists x.\ p(x) \wedge \exists x.\ q(x))$,
16. $((\exists x.\ p(x)) \to (\forall x.\ q(x))) \to (\forall x.\ p(x) \to q(x))$,
17. $(\forall x.\ p(x) \vee q(x)) \to ((\forall x.\ p(x)) \vee (\exists x.\ q(x)))$,
18. $(\forall x.\ p(x) \to q(x)) \to ((\forall x.\ p(x)) \to \forall x.\ q(x))$,
19. $(\forall x.\ p(x) \to q(x)) \to ((\exists x.\ p(x)) \to \exists x.\ q(x))$.