

# Robotics: Modeling (WMR)

(option ISD-master SMART)

W. Perruquetti

Ecole Centrale de Lille,  
Cité Scientifique, BP 48,  
F-59651 Villeneuve d'Ascq Cedex - FRANCE.  
tel : +33 3 20 33 54 50 fax : +33 3 20 33 54 18  
e-mail : wilfrid.perruquetti@ec-lille.fr

Septembre 2010 / Chapter 2

# Objectives

## Pre-requisites:

- Basic physics and maths,
- Chapter 1: Robotics: Introduction.

## Objectives:

- Wheeled Mobile Robot (WMR): definition,
- Pure rolling, non slipping condition and non holonomy constraint (WMR)
- WMR classification,
- Kinematics, dynamics and state model.

# Objectives

## Pre-requisites:

- Basic physics and maths,
- Chapter 1: Robotics: Introduction.

## Objectives:

- Wheeled Mobile Robot (WMR): definition,
- Pure rolling, non slipping condition and non holonomy constraint (WMR)
- WMR classification,
- Kinematics, dynamics and state model.

# Objectives

## Pre-requisites:

- Basic physics and maths,
- Chapter 1: Robotics: Introduction.

## Objectives:

- Wheeled Mobile Robot (WMR): definition,
- Pure rolling, non slipping condition and non holonomy constraint (WMR)
- WMR classification,
- Kinematics, dynamics and state model.

# Objectives

## Pre-requisites:

- Basic physics and maths,
- Chapter 1: Robotics: Introduction.

## Objectives:

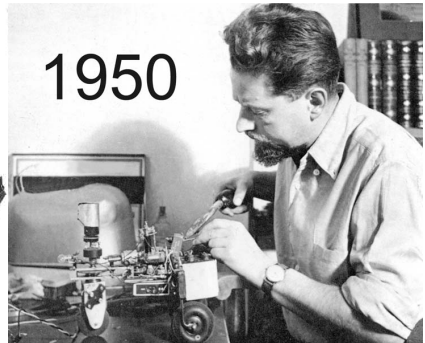
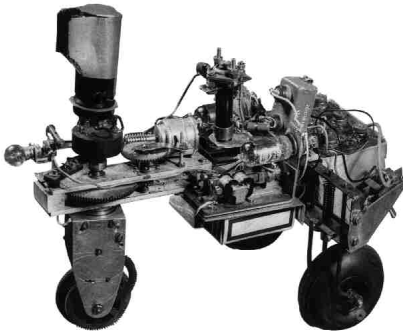
- Wheeled Mobile Robot (WMR): definition,
- Pure rolling, non slipping condition and non holonomy constraint (WMR)
- WMR classification,
- Kinematics, dynamics and state model.

# Table of Contents

- 1 Mobile Robots: Introduction
- 2 Non holonomic constraint and pure rolling condition
- 3 Wheeled Mobile Robots classification
- 4 Kinematics, Dynamics and state space representation

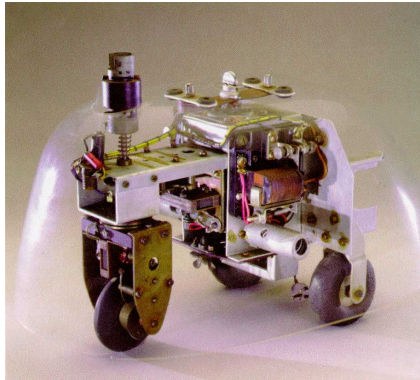
# History

- 1950: the turtle created by Grey Walter is probably one of the first autonomous robot.



**Elsie turtule (tortoise) by Grey Walter**

# History

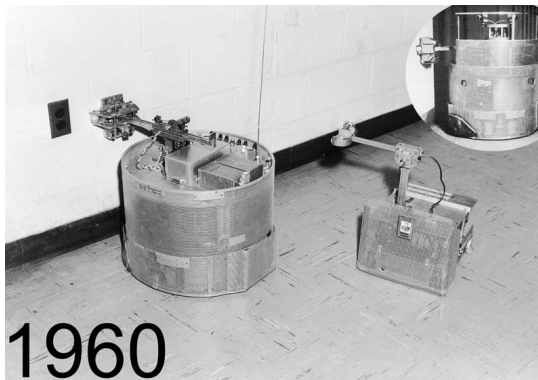


**Elsie turtule (tortoise) by Grey Walter**



# History

- 1960 (new electronics components such as transistors): Robot “Beast” from John Hopkins university



Beast from John Hopkins Univ.

# History

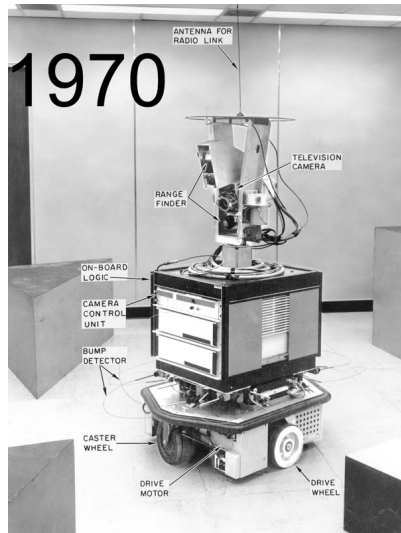
☞ Stanford Research Institute (1967) : machine avec capacité déduction et de réaction “logique” à des événements extérieurs.

Shakey (machine avec 2 roues motrices + gros ordinateur)

- missions : prendre un objet et le porter ailleurs, quelle que soit sa position,
- moyens de perception : télémètres à ultrason + caméra qui lui permet d'acquérir des images de son environnement.
- performances : 50 m/ mission

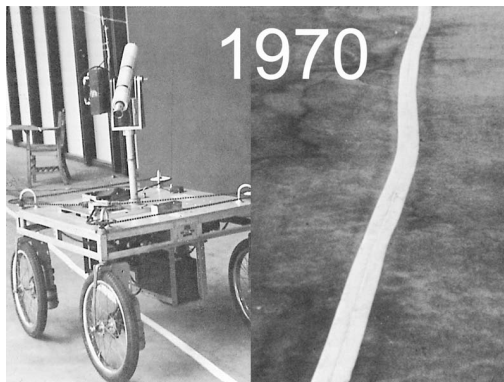
Robot “Shakey” from Stanford university (1969) used for IA research purpose at this time perception is not seen as a major problem (everything is known!)

# History



# History

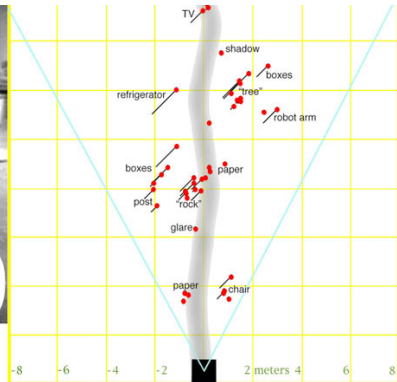
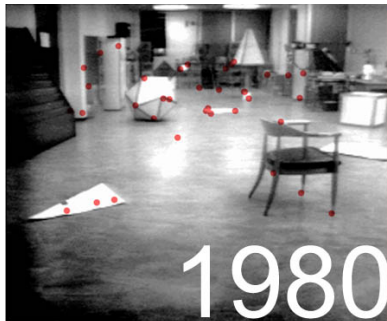
- 1980 : Stanford Cart is the first one to use stereo vision for obstacle avoidance



**Stanford Cart from Stanford Research Institute.**



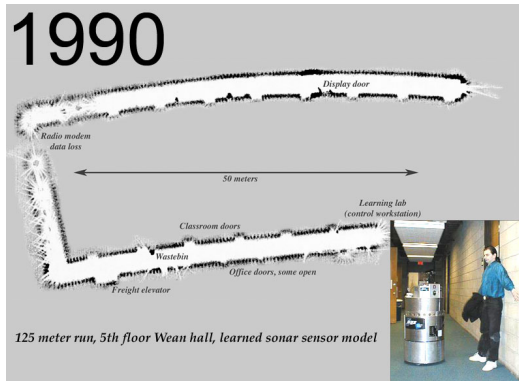
# History



**1980: side Stereoscopic 3D Mapping and Navigation.**

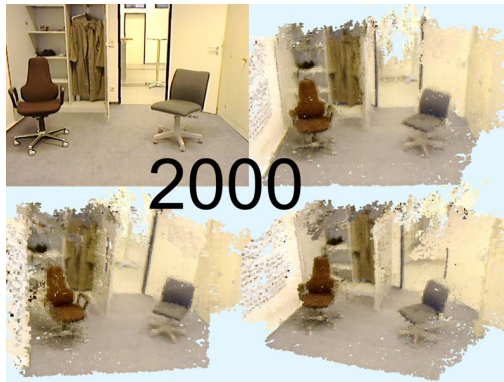
# History

- 1990 : reactive robotic introduced by Rodney Brook.
- Perception was the main concern which allows to use smaller robots with more environment adaptability and reactive tasks.



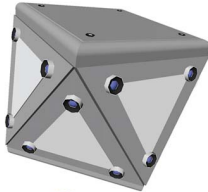
## 2D Mapping using Sonar Sensors.

# History



**2000: 3DMapping using Stereoscopic Vision.**

# History



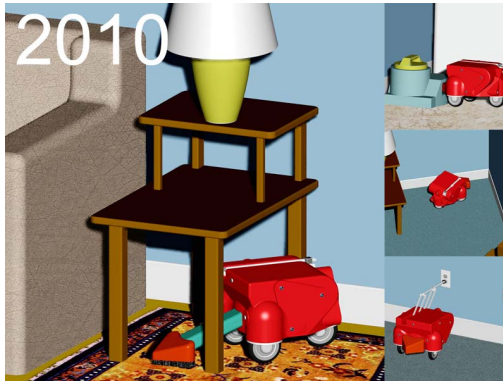
2005



**2005: Industrial Market expansion.**

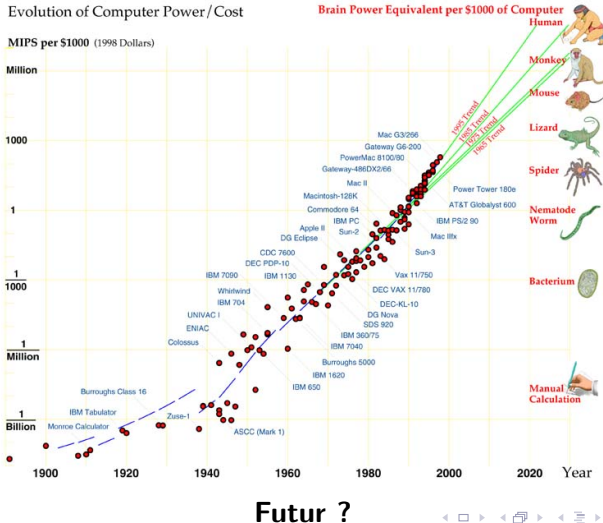


# History



**2010: present service robotics.**

# History



# History

- Industrie nucléaire (General Electric : quadrupède)
- Industrie spatiale (Jet Propulsion Laboratory de Pasadena pour l'exploration des planètes : Luna et Mars Rover)
- Conséquences : en informatique (IA), la téléopération et naissance du concept de robots mobiles autonomes (fin des années 1970 : Japon, les États-Unis et la France)
- Domaines d'applications : nucléaire, spatiale, militaire, domestique, tourisme, transport

## Definition

Un **robot mobile autonome** (**Autonomous mobile robot: AMR**) est un système automoteur, disposant de moyens de traitement de l'information permettant une capacité décisionnelle suffisante et de moyens matériels adaptés (la charge utile), de façon à pouvoir exécuter, sous contrôle humain réduit, un certain nombre de tâches précises, dans un environnement variable, non complètement connu à l'avance.

- ☞ **AMR**: wheels (WMR), à chenilles, legs, etc. . .
- ☞ La structure de commande intègre les aspects de perception de l'environnement de communication homme-machine et de commande du mouvement.
- ☞ La planification du mouvement peut se faire sans connaissances avec la détermination de la trajectoire au fur et à mesure de la progression du robot, ou avec connaissances a priori en discrétisant l'environnement.
- ☞ Mais, il faut également tenir compte des **contraintes cinématiques** liées au fait que le robot ne peut pas toujours suivre une trajectoire quelconque.

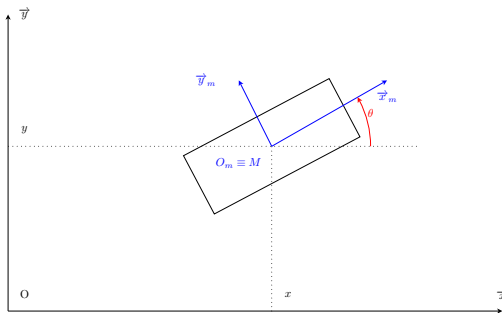
# Table of Contents

- 1 Mobile Robots: Introduction
- 2 Non holonomic constraint and pure rolling condition
  - Notation, posture and configuration
  - A first example of non holonomic constraint
  - Non holonomy: definition and properties
- 3 Wheeled Mobile Robots classification
- 4 Kinematics, Dynamics and state space representation

Un robot mobile est un véhicule à roues capable de se mouvoir d'une façon autonome (sans un opérateur humain). Nous supposons dans ce rapport que le véhicule est conçu à partir des éléments rigides et équipé de roues indéformables évoluant dans un plan horizontal. La position du véhicule dans le plan est décrite comme le montre la figure suivante.

Robot = rigid cart equipped with non deformable wheels and moving on a horizontal plan.

On note  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  un repère fixe quelconque, dont l'axe  $\vec{z}$  est vertical et  $\mathcal{R}_m = (O_m, \vec{x}_m, \vec{y}_m, \vec{z}_m)$  un repère mobile lié au robot (axe  $\vec{z}_m$  est vertical). On choisit généralement pour  $O_m$  un point remarquable de la plate-forme  $M \equiv o_m$ , typiquement le centre de l'axe des roues motrices s'il existe.



## Notations



## 👉 Posture:

$$P = (x, y, \theta)^T$$

$x$  et  $y$  sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point  $O_m \equiv M$  dans  $\mathcal{R}$  et  $\theta$  l'angle  $(\vec{x}, \vec{x}_m)$ . La situation du robot est donc définie sur un espace  $\mathcal{M}$  de dimension  $m = 3$ , comparable à l'espace opérationnel d'un manipulateur plan.

## 👉 Configuration:

$$q = (q_1, \dots, q_n)^T$$

de  $n$  coordonnées appelées coordonnées généralisées. La configuration est ainsi définie sur un espace  $\mathcal{N}$  de dimension  $n$ , appelée l'espace des configurations.

# Table of Contents

- 1 Mobile Robots: Introduction
- 2 Non holonomic constraint and pure rolling condition
  - Notation, posture and configuration
  - A first example of non holonomic constraint
  - Non holonomy: definition and properties
- 3 Wheeled Mobile Robots classification
- 4 Kinematics, Dynamics and state space representation

☞ Systèmes mécaniques : contraintes de position et/ou vitesse  
(relations entre les positions et /ou vitesses des différents points du système)

Si on peut les intégrer

- **Contrainte holonome**: relations algébriques liant les différentes coordonnées de position (il n'y a plus les vitesses!!)
- **Contrainte non holonome**: on ne peut pas intégrer ces contraintes et les vitesses restent dans ces relations algébriques.

Exemple:

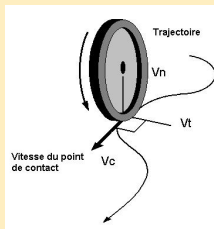
$$a\dot{x}_1 = b\dot{x}_2$$

$$\dot{x}_1 \sin(x_3) = \dot{x}_2 \cos(x_3)$$

- ✎ Pour un système holonome le retour à l'origine des variables articulaires signifie un retour à la position d'origine.
- ✎ Pour un système nonholonome, le retour à l'origine de la configuration des roues ne garantie pas le retour du système à la position d'origine.

Le mouvement d'un système nonholonome dépend du chemin suivi.

## Example



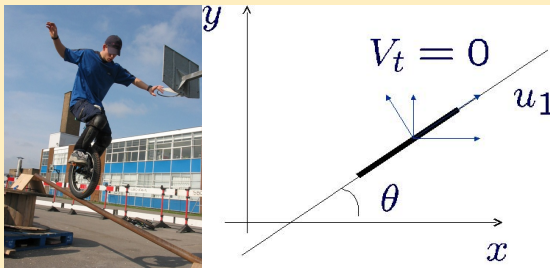
### Wheel with single point contact

Hypothesis: pure rolling along the wheel's plan:

- No sliding (dans la direction orthogonale au plan de la roue)
- No skidding (entre la roue et le sol)
- non-deformable wheels of fixed radius  $r$ .

Constraints equations:  $V_c = 0 \Rightarrow V_t = V_n = 0$ .

## Example



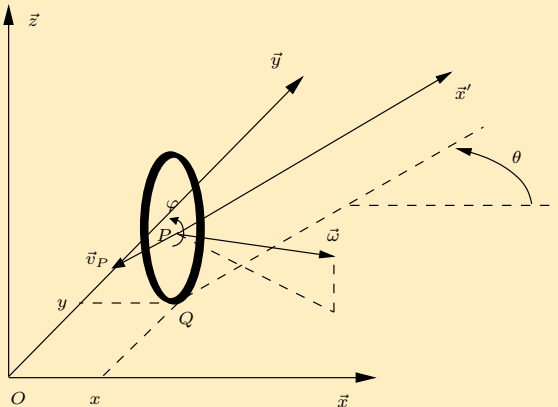
### Wheel with single point contact

Constraints equations:

$$V_t = 0 = \dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta).$$

## Example

### Detailed analysis



roue avec contact ponctuel



## Example

Soit  $P$  le centre de la roue,  $Q$  le point de contact de la roue avec le sol,  $\varphi$  l'angle de rotation propre de la roue et  $\theta$  l'angle entre le plan de la roue et le plan  $(O, \vec{x}, \vec{z})$  comme indiqué à la figure précédente. La nullité de la vitesse relative  $\vec{v}_Q$  roue/sol au point de contact permet d'obtenir une relation vectorielle entre la vitesse  $\vec{v}_P$  du centre  $P$  de la roue et le vecteur vitesse de rotation  $\vec{\omega}$  de la roue :

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PQ} = \vec{0}.$$

Les points  $P$  et  $Q$  ont pour coordonnées respectives  $(x, y, r)^T$  et  $(x, y, 0)^T$ .

$$\dot{x}\vec{x} + \dot{y}\vec{y} + (\dot{\theta}\vec{z} + \dot{\varphi}(\sin(\theta)\vec{x} - \cos(\theta)\vec{y})) \wedge (-r\vec{z}) = \vec{0}, \quad (1)$$

$$(\dot{x} + r\dot{\varphi}\cos(\theta))\vec{x} + (\dot{y} + r\dot{\varphi}\sin(\theta))\vec{y} = \vec{0}. \quad (2)$$



## Example

Ceci nous donne le système de contraintes scalaires:

$$\dot{x} + r\dot{\varphi} \cos(\theta) = 0, \quad (3)$$

$$\dot{y} + r\dot{\varphi} \sin(\theta) = 0. \quad (4)$$

que l'on peut transformer pour faire apparaître les composantes de vitesse dans le plan de la roue d'une part et perpendiculairement à la roue d'autre part :

$$-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) = 0, \quad (5)$$

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) = -r\dot{\varphi}. \quad (6)$$

Ces contraintes traduisent le fait que le vecteur  $\vec{v}_P$  soit dans le plan de la roue et ait pour module  $r\dot{\varphi}$ .

# Table of Contents

- 1 Mobile Robots: Introduction
- 2 Non holonomic constraint and pure rolling condition
  - Notation, posture and configuration
  - A first example of non holonomic constraint
  - Non holonomy: definition and properties
- 3 Wheeled Mobile Robots classification
- 4 Kinematics, Dynamics and state space representation

☞ Contraintes de nonholonomie : Conditions de contact des roues avec le sol sont régies par des contraintes sur les vitesses et qui ne sont pas intégrables.

## Definition

Les **contraintes de non holonomie** en robotique et en mécanique sont définies par des conditions cinématiques qui ne peuvent pas être représentées par une équation  $g(q, t) = 0$  contenant seulement les coordonnées généralisées  $q$  et le temps  $t$ .

Pour les robots mobiles à roues, ces contraintes sont formulées comme des équations différentielles non intégrables du premier ordre, contenant des dérivées dans le temps des coordonnées généralisées et représentées sous la forme Pfaff :

$$H(q)\dot{q} = 0, \quad (7)$$

avec  $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)^T$  vitesses généralisées et  $H(q) = (h_1(q), h_2(q), \dots, h_m(q))^T$  une matrice  $(m \times n)$  et les covecteurs  $h_1(q), h_2(q), \dots, h_m(q)$  sont linéairement indépendants telle que la matrice  $H(q)$  soit de rang plein pour tout  $q \in \mathbb{R}^n$ .

De manière concrète l'existence de contraintes non holonomes implique que le système ne peut pas effectuer certains mouvements instantanément. Par exemple, dans le cas de la roue, il ne peut y avoir de translation instantanée parallèlement à l'axe de la roue. Un tel déplacement nécessitera des manoeuvres. De même, comme on le sait bien, une voiture ne peut se garer facilement sans effectuer de créneaux.

## Definition

Le degré de liberté ( $d.l$ ) est défini comme la différence entre le nombre de coordonnées généralisées et le nombre de contraintes indépendantes, donné par :

$$d.l = n - m.$$

Il a été montré que l'équation d'état est écrite comme dans le cas des systèmes sans termes de dérive sous la forme :

$$\dot{x} = G(x)u, x \in \mathbb{R}^n \quad (8)$$

où  $G = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n-m}(x))^T$  est constituée de champs de vecteurs libres ( $\text{rang}(G) = n - m$ ) et  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{n-m})^T$  vecteur des entrées de commande.

Une supposition essentielle est que le rang de l'algèbre de Lie (dite aussi de contrôlabilité) générée par les crochets de Lie de  $g_1, g_2, \dots, g_{n-m}$  est  $n$ .

# Crochet de Lie

Le **crochet de Lie** (ou commutateur) défini par :

$$[g_1, g_2] = \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 \right),$$

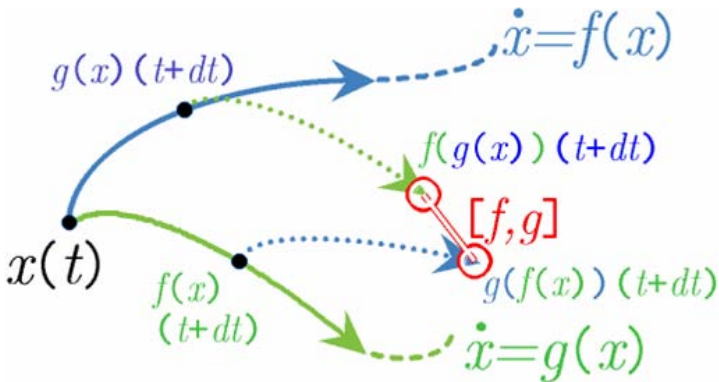
permet de calculer la condition de commutativité de deux flots  $\Phi_{g_1}^t$  et  $\Phi_{g_2}^s$ .

## Theorem

*Soient  $g_1$  et  $g_2$  des champs de vecteurs  $\mathcal{C}^\infty$  complets, définis sur  $\mathcal{X}$  (par exemple  $\mathbb{R}^n$ ). Alors :*

$$\forall t, \forall s, \quad \Phi_{g_1}^t \circ \Phi_{g_2}^s = \Phi_{g_2}^s \circ \Phi_{g_1}^t \Leftrightarrow [g_1, g_2] = 0.$$

# Crochet de Lie



Chochet de Lie.



# Crochet de Lie

Proof.

Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t, s > 0$  donnés. Pour un champ de vecteurs analytique  $X$ , on a  $\Phi_X^t(y) = y + tX(y) + R(t, y)$ , où  $R(t, y)$  représente un reste s'annulant pour  $t \rightarrow 0$ . On obtient donc :

$$\Phi_{g_1}^t \circ \Phi_{g_2}^s(x_0) = x_0 + (sg_2(x_0) + tg_1(x_0)) + st \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2(x_0) + R_1(t, s, x_0),$$

$$\Phi_{g_2}^s \circ \Phi_{g_1}^t(x_0) = x_0 + (sg_2(x_0) + tg_1(x_0)) + st \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1(x_0) + R_2(t, s, x_0),$$

et donc :

$$\Phi_{g_1}^t \circ \Phi_{g_2}^s(x_0) - \Phi_{g_2}^s \circ \Phi_{g_1}^t(x_0) = st[g_2, g_1](x_0) + R_3(t, s, x_0).$$

Prenons  $t = s$ , alors l'implication découle immédiatement. Pour la réciproque,

$[g_1, g_2] = 0 \Rightarrow \forall x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\Phi_{g_2}^{-t} \circ \Phi_{g_1}^s \circ \Phi_{g_2}^t(x_0) - \Phi_{g_1}^s(x_0)}{t} \right) = 0$ . Soit la trajectoire  $x(t) = \Phi_{g_2}^{-t} \circ \Phi_{g_1}^s \circ \Phi_{g_2}^t(x_0)$ , alors  $\dot{x}(t) = 0$ , donc  $\Phi_{g_2}^{-t} \circ \Phi_{g_1}^s \circ \Phi_{g_2}^t = \Phi_{g_1}^s$ . □

# Crochet de Lie : Propriétés

① Bilinéaire sur  $\mathbb{R}$  :

$$[\alpha_1 g_1 + g_2, g] = \alpha_1 [g_1, g] + [g_2, g]$$

$$[g, \alpha_1 g_1 + g_2] = \alpha_1 [g, g_1] + [g, g_2]$$

② anticommutativité :

$$[f, g] = -[g, f]$$

③ identité de Jacobi :

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

④ flot (commutativité) :

$$\forall t, \forall s, \quad \Phi_{g_1}^t \circ \Phi_{g_2}^s = \Phi_{g_2}^s \circ \Phi_{g_1}^t \Leftrightarrow [g_1, g_2] = 0.$$



# Crochet de Lie

En automatique, la non-commutativité des champs a une application très importante puisqu'elle permet de caractériser l'**atteignabilité (version locale de la commandabilité)** d'un système commandé du type

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2.$$

# Crochet de Lie

Et de façon générale pour des systèmes de la forme

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^p g_i(x) u_i, x \in \mathbb{R}^n$$

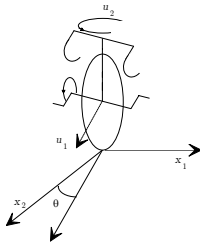
pour cela il faut que

$$\text{rang}(\mathcal{A}\{f, g_1, g_2, \dots, g_p\}) = n,$$

où  $\mathcal{A}\{f, g_1, g_2, \dots, g_p\}$  est l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $\{f, g_1, g_2, \dots, g_p\}$ .

$f$  est le champs de dérive: il est à noter que les modèles cinématiques que l'on va rencontrer ici sont sans dérive, c'est-à-dire que  $f = 0$ .

# Crochet de Lie



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2.$$

$$g_1(x) = (\sin(\theta), \cos(\theta), 0)^T, \quad \Phi_{g_1}^t : \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \theta_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{10} + \sin(\theta_0)t \\ x_{20} + \cos(\theta_0)t \\ \theta_0 \end{pmatrix},$$

$$g_2 = (0, 0, 1)^T, \quad \Phi_{g_2}^t : \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \theta_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \theta_0 + t \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \Phi_{g_2}^t \circ \Phi_{g_1}^s \neq \Phi_{g_1}^s \circ \Phi_{g_2}^t$$

# Crochet de Lie

$$([g_1, g_2], g_1, g_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\dim (\text{vect}\{[g_1, g_2], g_1, g_2\}) = 3,$$

## Definition

Soient  $g_1, g_2, \dots, g_p$  des champs de vecteurs que l'on suppose libres (idépendant les uns des autres). L'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $g_i$  est la distribution construite à partir de  $\text{vect}\{g_1, g_2, \dots, g_p\}$  à laquelle on ajoute tous les crochets de Lie successifs formés des  $g_i$  à condition qu'ils augmentent la dimension de l'algèbre (c'est-à-dire qui ne sont pas déjà engendrés par la distribution que l'on est en train de construire !). On la note  $\mathcal{A}\{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ .

$\mathcal{A}$  = accessibilité (controllabilité). Si  $\text{rang}(\mathcal{A}\{g_1, g_2, \dots, g_p\}) = n$  alors le système  $\dot{x} = G(x)u, x \in \mathbb{R}^n, G = (g_1, g_2, \dots, g_p)$  est accessible (localement commandable).

Le crochet de Lie de deux champs de vecteurs  $g_1, g_2$  est un nouveau champs de vecteur  $[g_1, g_2]$ , défini par

$$[g_1, g_2](x) = \left( \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2 \right) (x). \quad (9)$$

Cette supposition concernant l'algèbre de Lie garantie qu'il n'existe pas de fonctions non triviales intégrant les contraintes représentées par l'équation (8). Dans ce cas, (8) est dit complètement non holonomique et contrôlable.



## Theorem

*Soit un système de configuration  $q$ , de dimension  $n$ , soumis à un ensemble de contraintes indépendantes s'écrivant sous la forme*

$$H(q)\dot{q} = 0. \quad (10)$$

*Avec  $H(q)$  une matrice de dimension  $n - m$ . Soit  $H^\perp(q) = (h_1^\perp(q), h_2^\perp(q), \dots, h_m^\perp(q))$  une matrice de rang plein  $m$ , telle que  $H^T(q)H^\perp(q) = 0$  sur tout l'espace des configurations. Soit enfin l'algèbre de Lie  $\mathcal{A}(H^\perp)$  de dimension  $p$ , avec  $m \leq p \leq n$ . Alors, parmi les contraintes auxquelles est soumis le système,  $n - p$  sont intégrables.*

Prenons l'exemple de la roue :

$$-\dot{x} \sin(\theta) + \dot{y} \cos(\theta) = 0, \quad (11)$$

$$\dot{x} \cos(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) = -r\dot{\varphi}. \quad (12)$$

Sa configuration est définie par sa configuration  $q = (x, y, \theta, \varphi)^T$ .

Ces contraintes se mettent sous la forme (7) i.e.  $H(q)\dot{q} = 0$ , avec :

$$H^T(q) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

Let us find  $H^\perp(q)$  in the following form

$$H^\perp(q) = \begin{pmatrix} h_{11}^\perp(q) & h_{12}^\perp(q) \\ h_{21}^\perp(q) & h_{22}^\perp(q) \\ h_{31}^\perp(q) & h_{32}^\perp(q) \\ h_{41}^\perp(q) & h_{42}^\perp(q) \end{pmatrix}$$

such that  $H^T(q)H^\perp(q) = 0$  this is:

$$-\sin(\theta)h_{11}^\perp(q) + \cos(\theta)h_{21}^\perp(q) = 0 \quad (13)$$

$$\cos(\theta)h_{11}^\perp(q) + \sin(\theta)h_{21}^\perp(q) + rh_{41}^\perp(q) = 0 \quad (14)$$

$$-\sin(\theta)h_{12}^\perp(q) + \cos(\theta)h_{22}^\perp(q) = 0 \quad (15)$$

$$\cos(\theta)h_{12}^\perp(q) + \sin(\theta)h_{22}^\perp(q) + rh_{42}^\perp(q) = 0 \quad (16)$$

Leading to

$$H^{\perp}(q) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

Using  $h_1^\perp(q) = (\cos(\theta) \ \sin(\theta) \ 0 \ -\frac{1}{r})^T$ ,  $h_2^\perp(q) = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$ , let us compute the successive Lie brackets

$$\begin{aligned}
 [h_1^\perp, h_2^\perp](q) &= \left( \frac{\partial h_2^\perp}{\partial q} h_1^\perp - \frac{\partial h_1^\perp}{\partial x} h_2^\perp \right)(q) \\
 &= 0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ h_1^\perp, \left[ h_1^\perp, h_2^\perp \right] \right] (q) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ -\frac{1}{r} \end{pmatrix} \\
 &\quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= 0 \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[ h_2^\perp, \left[ h_1^\perp, h_2^\perp \right] \right] (q) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{1} \\ -\frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\frac{1}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{r} \det \begin{pmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{r} \neq 0
 \end{aligned} \tag{20}$$

Thus  $\mathcal{A}(H^\perp)$  is of dimension 4, we can remove  $4 - 4 = 0$  constraints thus the previous constraints are both non holonomic.



# Table of Contents

- 1 Mobile Robots: Introduction
- 2 Non holonomic constraint and pure rolling condition
- 3 Wheeled Mobile Robots classification**
  - Some wheels description
  - Mobility degree and ICR
  - Steerability degree
  - WMR classification
- 4 Kinematics, Dynamics and state space representation

During the movement, let us assume that:

- le plan de chaque roue reste vertical,
- l'orientation de la roue par rapport au cadre peut être fixe ou variable,
- le contact entre la roue et le sol est réduit à un seul point du plan.

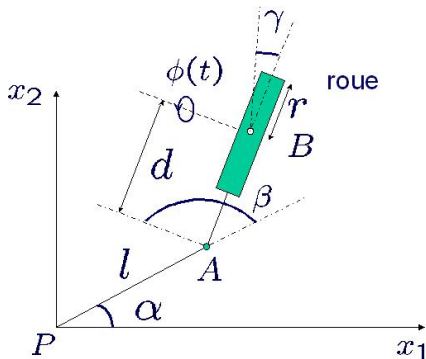
On distingue deux classes fondamentales de roues idéales :

- les roues **conventionnelles** : le contact entre la roue et le sol satisfait les conditions de roulement parfait et sans glissement, ceci implique donc que la vitesse du point de contact  $V_c$  est nulle : vitesse au point de contact nulle dans l'axe de la roue.
- les roues **suédoises** : seule une composante de la vitesse du point de contact de la roue avec le sol est supposée nulle et ceci tout le long du mouvement. La direction de cette composante nulle est à priori arbitraire, mais elle est fixée par rapport à l'orientation de la roue : une seule composante est nulle de direction faisant un angle  $\gamma$  avec la roue.

Deux types de contraintes cinématiques doivent être satisfaites en chaque point de la plate-forme mobile, et ceci pour permettre au robot de bouger :

- le long du plan de la roue: supposition que la roue roule seulement, i.e. la rotation de la roue dans son plan vertical est entièrement manifestée comme un déplacement le long de l'axe principal du robot dans le plan horizontal du mouvement.
- orthogonal au plan de la roue: supposition de non glissement des roues, i.e. la vitesse du robot au long de l'axe orthogonal au plan de la roue est nulle.

Une roue d'un robot mobile est décrite (au plus) par six paramètres: trois angles ( $\alpha$   $\beta$   $\gamma$ ) et trois longueurs ( $l$   $d$   $r$ ). En utilisant les coordonnées polaires, la position de  $A$  dans la base  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  est caractérisée par la distance  $PA = l$  et l'angle  $\alpha$ . L'orientation du plan de la roue par rapport à  $PA$  est caractérisé par l'angle  $\beta$  constant pour des roues fixes et variable  $\beta(t)$  pour des roues orientables centrées et décentrées. La rotation de la roue autour de son axe (horizontal) est décrit par l'angle variable  $\phi(t)$ , et enfin, le rayon de la roue est noté  $r$ .

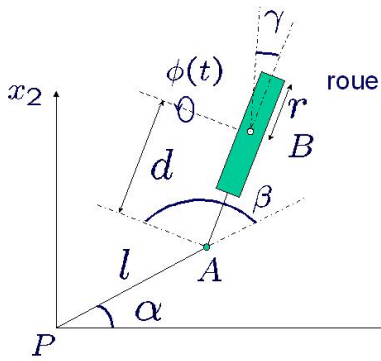


## Convention pour les roues

- ☞ roues conventionnelles ( $\gamma = 0$ ) : roues centrées fixes  $d = 0, \beta = cte$ , roues orientables centrées  $d = 0, \beta(t)$ , et roues orientables décentrées  $d \neq 0, \beta(t)$ .
- ☞ roues suédoises ( $\gamma \neq 0$ ).

# Roues conventionnelles

Trois configurations sont considérées pour les roues conventionnelles ( $\gamma = 0$ ) : roues centrées fixes  $d = 0, \beta = cte$ , roues orientables centrées  $d = 0, \beta(t)$ , et roues orientables décentrées  $d \neq 0, \beta(t)$ .



# Roues conventionnelles

Pour une roue décentrée, la rotation du plan de la roue se fait autour d'un axe vertical qui ne passe pas par le centre de la roue noté ici ( $B$ ) : ce qui nécessite plus de paramètres. Le centre de la roue est lié à la structure par une tige rigide  $AB$  de longueur constante ( $d$ ), est qui peut tourner autour d'un axe vertical au point  $A$ . Ce point  $A$  qui est lui-même un point de la structure, a pour position en coordonnées polaires  $l$  et  $\alpha$ , comme auparavant. Le plan de la roue est aligné le long de  $AB$ .



# Roues conventionnelles

Contraintes de roulement parfait et sans glissement:

- ◇ le long du plan de la roue :  $V_{cn} = 0$

$$\begin{pmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l \cos \beta \end{pmatrix} R(\theta) \dot{\zeta} + r \dot{\phi} = 0$$

- ◇ Orthogonal au plan de la roue:  $V_{ct} = 0$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & d + l \sin(\beta) \end{pmatrix} R(\theta) \dot{\zeta} + d \dot{\beta} = 0$$

# Roues conventionnelles

Where:

- $d = 0$  pour les roues fixes et celles orientables centrées,
- $\dot{\beta} = 0$  pour les roues fixes évidemment.
- $R(\theta)$  la matrice de rotation orthogonale donnée par :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Roues conventionnelles **centrée** fixe ou orientable (dite aussi de gouverne)

Contraintes de roulement parfait et sans glissement:

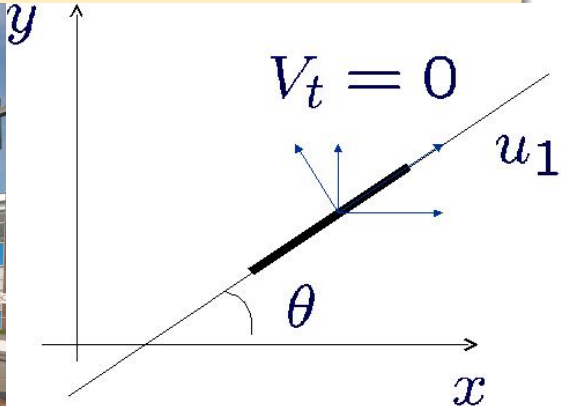
- ◇ le long du plan de la roue :  $V_{cn} = 0$

$$\begin{pmatrix} -\sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) & l \cos \beta \end{pmatrix} R(\theta) \dot{\zeta} + r \dot{\phi} = 0$$

- ◇ Orthogonal au plan de la roue:  $V_{ct} = 0$

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & \sin(\alpha + \beta) & l \sin(\beta) \end{pmatrix} R(\theta) \dot{\zeta} = 0$$

## Roue conventionnelle : Example



roue conventionnelle avec contact ponctuel

## Roue conventionnelle : Example

Si  $P$  est le milieu de la roue  $\alpha = l = d = 0$  et  $\beta = \frac{\pi}{2}$

◇ le long du plan de la roue :  $V_{cn} = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} R(\theta) \dot{\zeta} + r \dot{\phi} = 0 \quad (21)$$

$$-\dot{y} \sin(\theta) - \dot{x} \cos(\theta) + r \dot{\phi} = 0 \quad (22)$$

◇ Orthogonal au plan de la roue:  $V_{ct} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R(\theta) \dot{\zeta} = 0 \quad (23)$$

$$\dot{y} \cos(\theta) - \dot{x} \sin(\theta) = 0 \quad (24)$$

# Roues suédoises

Comme pour les roues conventionnelles, la position de la roue suédoise par rapport à la base  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  est décrite par trois paramètres constants :  $\alpha, \beta, l$ . Le seul paramètre additionnel pour caractériser la direction par rapport au plan, de la composante nulle de la vitesse du point de contact, est représenté par l'angle  $\gamma$ .

# Roues suédoises

La contrainte de mouvement pour les roues suédoises est exprimé comme suit :

$$\begin{pmatrix} -\sin(\alpha + \beta + \gamma) & \cos(\alpha + \beta + \gamma) & l \cos(\beta + \gamma) \end{pmatrix} R(\theta) \dot{\zeta} + r \cos(\gamma) \dot{\phi} = 0$$

# Table of Contents

- 1 Mobile Robots: Introduction
- 2 Non holonomic constraint and pure rolling condition
- 3 Wheeled Mobile Robots classification**
  - Some wheels description
  - **Mobility degree and ICR**
  - Steerability degree
  - WMR classification
- 4 Kinematics, Dynamics and state space representation



Considérant maintenant, un robot mobile général, équipé de  $N$  roues, et qui sont des quatre types présentés auparavant.

$$N = N_f + N_c + N_{oc} + N_{sw}$$

avec

- $N_f$  : nombre de roues conventionnelles fixes,
- $N_c$  : nombre de roues conventionnelles orientables centrées,
- $N_{oc}$  : nombre de roues conventionnelles orientables décentrées,
- $N_{sw}$  : nombres de roues suédoises.

La configuration du robot est totalement décrite par les vecteurs suivants :

- Coordonnées de position (posture)  $\zeta(t)$  : pour la position et l'orientation dans le plan.
- Coordonnées angulaires  $\beta_c(t)$  : pour l'orientation des angles des roues orientables centrées et  $\beta_{oc}(t)$  pour les roues orientables décentrées.
- Coordonnées de rotation  $\phi(t)$  : pour l'orientation des angles de rotation des roues autour des axes horizontaux.

$(\zeta(t), \beta_c(t), \phi(t))^T$  constituent les coordonnées de configuration : le nombre total étant  $3 + N_f + 2N_{oc} + 2N_{od} + N_{sw}$

By gathering the obtained constraints:

$$J_1(\beta_{oc}, \beta_{od}) R \dot{\zeta} + J_2 \dot{\phi} = 0 \quad (25)$$

$$C_1(\beta_{oc}, \beta_{od}) R \dot{\zeta} + C_2 \dot{\beta} = 0 \quad (26)$$

where

$$J_1(\beta_{oc}, \beta_{od}) = \begin{pmatrix} J_{1f} \\ J_{1oc}(\beta_{oc}) \\ J_{1od}(\beta_{od}) \\ J_{1s} \end{pmatrix}, J_2 = \text{diag}(r_i) \quad (27)$$

$$C_1(\beta_{oc}, \beta_{od}) = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1oc}(\beta_{oc}) \\ C_{1od}(\beta_{od}) \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_{2od} \end{pmatrix}. \quad (28)$$

En mettant les contraintes sous forme matricielle:

$$C_{1f}R(\theta)\dot{\zeta} = 0 \quad (29)$$

$$C_{1oc}(\beta_{oc})R(\theta)\dot{\zeta} = 0 \quad (30)$$

Donc  $\dot{\zeta}R(\theta)$  appartient au noyau de la matrice :

$$C_1^*(\beta_c) = \begin{pmatrix} C_{1f} \\ C_{1oc}(\beta_{oc}) \end{pmatrix} \quad (31)$$

i.e.  $\dot{\zeta}R(\theta) \in \ker(C_1^*(\beta_{oc}))$  avec  $C_{1f}, C_{1oc}(\beta_{oc})$  des matrices respectivement de dimension  $(N_f \times 3), (N_{oc} \times 3)$  et dont les lignes sont dérivées des contraintes.

## Proposition

Soient  $v_i$  une base de  $\ker(C_1^*(\beta_{oc}))$ , alors

$$\dot{\zeta} = R^T(\theta) \sum_{i=1}^{\dim(\ker(C_1^*(\beta_{oc})))} a_i(t) v_i$$

Nécessairement on a  $\text{rang}(C_1^*(\beta_{oc})) \leq 3$ . D'autre part si  $\text{rang}(C_1^*(\beta_{oc})) = 3$  alors  $\ker(C_1^*(\beta_{oc}))$  est réduit à 0 et donc  $\dot{\zeta} R(\theta) = 0$  : il ne peut y avoir de mouvement !!

☞ La non-holonomie des contraintes cinématiques impose des restrictions dans la mobilité du robot. La description de l'orientation des roues est très discutable. Parmi toutes les configurations possibles, seulement quelques unes permettent la mobilité du robot en satisfaisant le roulement pur et le non glissement. Pour plus de détails concernant ces restrictions, le lecteur peut se référer à l'article [Cam-97].

☞ Bien évidemment, pour un ensemble de roues donné, toute disposition ne conduit pas à une solution viable. Un mauvais choix peut limiter la mobilité du robot ou occasionner d'éventuels blocages. Par exemple, un robot équipé de deux roues fixes non parallèles ne pourrait pas aller en ligne droite.

## Definition

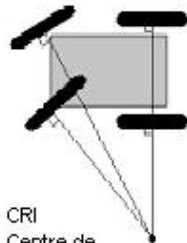
On appelle centre de rotation instantané (CRI) le point de vitesse nulle liés aux roues autour duquel tourne le robot de façon instantanée.

## Proposition

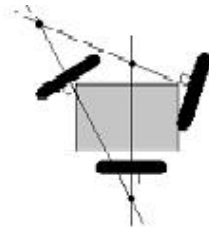
*Les points de vitesse nulle liés aux roues se trouvant sur leur axe de rotation, le CRI est le point d'intersection des axes de rotation des roues.*

☞ Tous les axes des roues ont pour point d'intersection le Centre de Rotation Instantané CRI  $\Rightarrow$  le vecteur vitesse en chaque point de la structure est orthogonal à la droite liant ce point au CRI.





(a)



Impossible de tourner

(b)



Roues fixes n'ayant pas le meme axe

(c)

CRI.

## Proposition

*Pour qu'une disposition de roues soit viable et n'entraîne pas de glissement ou dérapage des roues sur le sol, il faut qu'il existe un unique CIR.*

## Proposition

$\text{rank}(C_1^*(\beta_{oc})) \leq 2 \Leftrightarrow \text{le CIR est unique. (IRC instantaneouse rotation center)}$

Pour cette raison, il existe en pratique 5 catégories de robots mobiles à roues.

## Definition

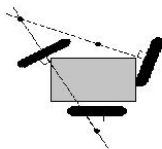
Le degrés de mobilité d'un robot est:

$$\delta_m = \dim(\ker(C_1^*(\beta_{oc}))) = 3 - \dim(\text{Im}(C_1^*(\beta_{oc}))) = 3 - \text{rank}(C_1^*(\beta_{oc})).$$

## Remark

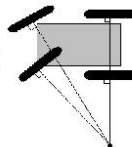
*Le degré de mobilité  $\delta_m$  est le nombre de degré de liberté du mouvement du robot.*

- ☞ Si  $\text{rank}(C_{1f}) = 2$  on a au moins 2 roues fixes et si on en a plus les axes de rotations des roues s'intersectent en un point IRC qui est fixe : le seul mouvement possible est alors un mouvement circulaire (le robot tourne en rond!).
- ☞ Si  $\text{rank}(C_{1f}) = 1$  les axes des roues fixes sont parallèles.



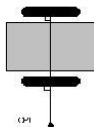
Ne peut se déplacer (pas CRI)

**degré de mobilité 0**



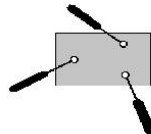
Mouvement en arc fixe (1 seul CRI)

**degré de mobilité 1**



Mouvement en arc variable (ligne de CRIs)

**degré de mobilité 2**



Mobilité totale (CRI se trouve à n'importe quel point)

**degré de mobilité 3**

# Table of Contents

- 1 Mobile Robots: Introduction
- 2 Non holonomic constraint and pure rolling condition
- 3 Wheeled Mobile Robots classification**
  - Some wheels description
  - Mobility degree and ICR
  - **Steerability degree**
  - WMR classification
- 4 Kinematics, Dynamics and state space representation

Let us assume that the robot is non degenerate

$$\text{rank}(C_{1f}) \leq 2 \quad (32)$$

$$\text{rank}(C_1^*(\beta_{oc}) = \text{rank}(C_{1f}) + \text{rank}(C_{1oc}(\beta_{oc})) \leq 2 \quad (33)$$

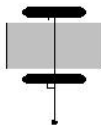
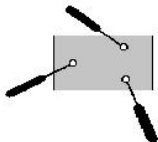
### Definition

Let us define the steerability degree by

$$\delta_s = \text{rank}(C_{1oc}(\beta_{oc}))$$

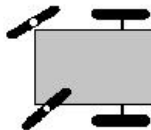
Let us mention that  $\delta_s \leq 2$ .

The steerability degree  $\delta_s$  est le nombre de roues centrées orientables qui peuvent être indépendantes pour diriger le robot.



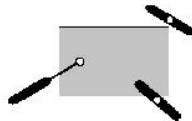
Pas de roues centrées orientables

**Steerability degree 0**



Deux roues centrées orientables dépendantes

**Steerability degree 1**



Deux roues centrées orientables indépendantes

**Steerability degree 2**

# Table of Contents

- 1 Mobile Robots: Introduction
- 2 Non holonomic constraint and pure rolling condition
- 3 Wheeled Mobile Robots classification**
  - Some wheels description
  - Mobility degree and ICR
  - Steerability degree
  - **WMR classification**
- 4 Kinematics, Dynamics and state space representation



Cinq structures non singulières existent dont le degré de mobilité  $\delta_m$  and the steerability degree  $\delta_s$  satisfont les trois inéquations suivantes :

$$1 \leq \delta_m \leq 3 \quad (34)$$

$$0 \leq \delta_s \leq 2 \quad (35)$$

$$2 \leq \delta_m + \delta_s \leq 3 \quad (36)$$

Suivant le critère de mobilité, deux classes importantes des robots mobiles apparaissent :

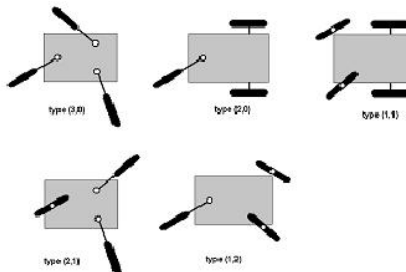
- Robots omnidirectionnels : mobilité totale dans le plan  $\delta_m = 3$
- Robots à mobilité réduite : degré de mobilité inférieur à 3  
 $\delta_m < 3$ .

Les structures sont désignées par la forme : robot mobile de type  $(\delta_m, \delta_s)$ .

D'ici, il existe seulement cinq types de robots mobiles, qui correspondent aux cinq paires des valeurs de  $\delta_m, \delta_s$ , et qui satisfont les trois dernières inéquations, comme le montre le tableau suivant :

<i>Type</i>	<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>	<i>V</i>
$\delta_m$	3	2	2	1	1
$\delta_s$	0	0	1	1	2

Table: Types de robots mobiles



## Examples

Les caractéristiques principales de chaque type de robot mobile sont brièvement décrites et notre attention a porté sur des robots mobiles à trois roues. Une description complète peut être trouvée dans [Cam-96].

## Robot de type $(3, 0)$ .

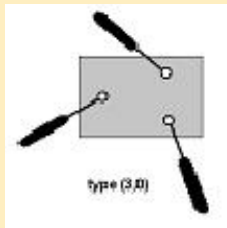
$$\Rightarrow \delta_m = \dim(\ker(C_1^*(\beta_{oc})) = 3, \text{rank}(C_1^*(\beta_{oc})) = 0, \delta_s = \text{rank}(C_{1oc}(\beta_{oc})) = 0$$

⇒ Ces robots n'ont ni de roues conventionnelles fixes ( $N_f = 0$ ), ni de roues centrées orientables ( $N_c = 0$ ).

⇒ Le robot est dit “omnidirectionnel” parce qu’il a une totale mobilité dans le plan, i.e. qu’il peut bouger dans n’importe quelle direction sans aucune réorientation à chaque instant. Inversement, les quatre autres types de robots mobiles ont une mobilité réduite.

# Robot de type $(3, 0)$ .

Example: 3 roues suèdoise



**Robot de type  $(3, 0)$  : 3 roues suèdoise**

## Robot de type $(3, 0)$ .

The configuration reduces to  $(x, y, \theta)$ .

Kinematic model

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (37)$$

# Robot de type $(3, 0)$ .

Exemple 2: un robot omnidirectionnel, i.e. du type  $(3, 0)$ , avec trois roues décentrées orientables.



## Robot de type $(2, 0)$ .

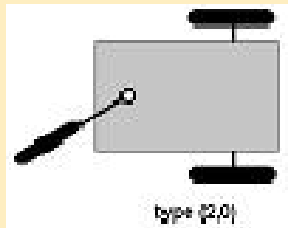
$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta_m &= \dim(\ker(C_1^*(\beta_{oc}))) = 2, \text{rank}(C_1^*(\beta_{oc})) = 1, \delta_s = \\ &\text{rank}(C_{1oc}(\beta_{oc})) = 0 \\ \Rightarrow \text{rank}(C_{1f}) &= 1. \end{aligned}$$

⇒ Ces robots n'ont pas de roues conventionnelles centrées orientables ( $N_{co} = 0$ ), mais ils ont une roue conventionnelle fixe ( $N_f > 0$ ), ou même plusieurs mais qui sont montées sur un seul axe commun. Le robot le plus connu et appartenant à cette classe est le robot **Hilare**.

⇒ Mobilité réduite.

# Robot de type $(2, 0)$ .

Example: 2 roues f sur le même axe et 1 roue od



**Robot de type  $(2, 0)$  : 2 roues f sur le même axe et 1 roue od**

## Robot de type $(2, 0)$ .

The configuration reduces to  $(x, y, \theta)$ .

Kinematic model

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \omega \end{pmatrix} \quad (38)$$

## Robot de type $(2, 1)$ .

$$\Rightarrow \delta_m = \dim(\ker(C_1^*(\beta_{oc}))) = 2, \text{rank}(C_1^*(\beta_{oc})) = 1, \delta_s = \text{rank}(C_{1oc}(\beta_{oc})) = 1$$

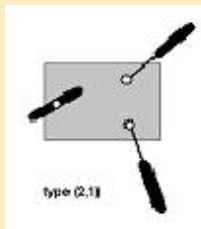
$$\Rightarrow C_{1f} \text{rank}(C_{1f}) = 0.$$

☞ Ces robots n'ont pas de roues conventionnelles fixes. Ils ont une roue conventionnelle orientable centrée et deux roues conventionnelles orientables non-centrées.

☞ Mobilité réduite.

## Robot de type $(2, 1)$ .

Example: robot du type  $(2, 1)$ , avec deux roues conventionnelles orientables décentrées et une roue centrée orientable



**Robot de type  $(2, 1)$**

## Robot de type $(2, 1)$ .

The configuration reduces to  $(x, y, \theta, \beta_{c1})$ .

Kinematic model

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ -\sin(\theta + \beta_{c1}) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad (39)$$

# Robot de type (1, 1).

$$\Rightarrow \delta_m = \dim(\ker(C_1^*(\beta_{oc})) = 1, \text{rank}(C_1^*(\beta_{oc})) = 2, \delta_s = \text{rank}(C_{1oc}(\beta_{oc})) = 1$$

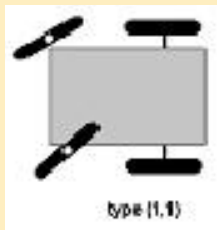
$$\Rightarrow C_{1f} \text{rank}(C_{1f}) = 1.$$

☞ Ces robots ont une ou plusieurs roues conventionnelles avec un seul axe commun et aussi une ou plusieurs roues conventionnelles centrées orientables.

☞ Mobilité réduite.

## Robot de type $(1, 1)$ .

Example: un robot du type  $(1, 1)$ , avec deux roues conventionnelles fixe sur le meme axe et une roue centrée orientable, c'est le cas d'un tricycle



**Robot de type  $(1, 1)$**



# Robot de type (1, 1).

The configuration reduces to  $(x, y, \theta, \beta_{c3})$ .

Kinematic model

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \cos(\theta) \sin(\beta_{c3}) & 0 \\ -L \sin(\theta) \sin(\beta_{c3}) & 0 \\ \cos(\beta_{c3}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \omega_1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

## Robot de type (1, 2).

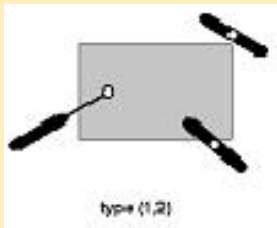
$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta_m &= \dim(\ker(C_1^*(\beta_{oc}))) = 1, \text{rank}(C_1^*(\beta_{oc})) = 2, \delta_s = \\ &\text{rank}(C_{1oc}(\beta_{oc})) = 2 \\ \Rightarrow C_{1f} \text{rank}(C_{1f}) &= 1. \end{aligned}$$

☞ Ces robots n'ont pas de roues conventionnelles fixes. Ils ont au minimum deux roues conventionnelles orientables centrées.

☞ Mobilité réduite.

## Robot de type $(1, 2)$ .

Example: un robot du type  $(1, 2)$ , avec deux roues conventionnelles orientables centrées et une roue décentrée orientable



**Robot de type  $(1, 2)$**

# Robot de type (1, 2).

The configuration reduces to  $(x, y, \theta, \beta_{c1}, \beta_{c2})$ .

Kinematic model

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\beta}_{c1} \\ \dot{\beta}_{c2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\sin(\beta_{c1}) \cos(\theta + \beta_{c2}) + \sin(\beta_{c2}) \cos(\theta + \beta_{c1})) \\ -L(\sin(\beta_{c1}) \sin(\theta + \beta_{c2}) + \sin(\beta_{c2}) \sin(\theta + \beta_{c1})) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Types of models: see [?] “Theory of Robot Control”, C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin (Eds).

- ① Kinematic model (take into account non holonomic constraints)
  - 👉 **Posture Kinematic Model (PKM)**: the simplest state model which gives a global description of the mobile robot (useful for **control**). Posture  $= (x, y, \theta)$  in most of the case.
  - 👉 **Configuration Kinematic Model (CKM)**: all the configuration variables (posture + angular position of wheel, ...).
- ② Dynamical model (idem + dynamics induced by actuators (most of the time electrical motors))
  - 👉 **Configuration Dynamic Model (CDM)** : include dynamics of the mobile robots and torques and forces generated by the actuators.
  - 👉 **Posture Dynamic Model (PDM)** : equivalent to (CDM) in order to get the EDO (CDM) + 1  $\int$  before each  $F, \tau$ .

Types of models: see [?] “Theory of Robot Control”, C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin (Eds).

- ❶ Kinematic model (take into account non holonomic constraints)
  - 👉 *Posture Kinematic Model (PKM)*: the simplest state model which gives a global description of the mobile robot (useful for control). Posture  $= (x, y, \theta)$  in most of the case.
  - 👉 *Configuration Kinematic Model (CKM)*: all the configuration variables (posture + angular position of wheel, ...).
- ❷ Dynamical model (idem + dynamics induced by actuators (most of the time electrical motors))
  - 👉 *Configuration Dynamic Model (CDM)* : include dynamics of the mobile robots and torques and forces generated by the actuators.
  - 👉 *Posture Dynamic Model (PDM)* : equivalent to (CDM) in order to get the EDO (CDM) + 1  $\int$  before each  $F, \tau$ .

Types of models: see [?] “Theory of Robot Control”, C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin (Eds).

- 1 Kinematic model (take into account non holonomic constraints)
  - ☞ *Posture Kinematic Model (PKM)*: the simplest state model which gives a global description of the mobile robot (useful for control). Posture  $= (x, y, \theta)$  in most of the case.
  - ☞ **Configuration Kinematic Model (CKM)**: all the configuration variables (posture + angular position of wheel, ...).
- 2 Dynamical model (idem + dynamics induced by actuators (most of the time electrical motors))
  - ☞ Configuration Dynamic Model (CDM) : include dynamics of the mobile robots and torques and forces generated by the actuators.
  - ☞ Posture Dynamic Model (PDM) : equivalent to (CDM) in order to get the EDO (CDM) + 1  $\int$  before each  $F, \tau$ .

Types of models: see [?] “Theory of Robot Control”, C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin (Eds).

- ❶ Kinematic model (take into account non holonomic constraints)
  - 👉 *Posture Kinematic Model (PKM)*: the simplest state model which gives a global description of the mobile robot (useful for control). Posture  $= (x, y, \theta)$  in most of the case.
  - 👉 *Configuration Kinematic Model (CKM)*: all the configuration variables (posture + angular position of wheel, ...).
- ❷ Dynamical model (idem + dynamics induced by actuators (most of the time electrical motors))
  - 👉 *Configuration Dynamic Model (CDM)* : include dynamics of the mobile robots and torques and forces generated by the actuators.
  - 👉 *Posture Dynamic Model (PDM)* : equivalent to (CDM) in order to get the EDO (CDM) + 1  $\int$  before each  $F, \tau$ .



Types of models: see [?] “Theory of Robot Control”, C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin (Eds).

- 1 Kinematic model (take into account non holonomic constraints)
  - ☞ *Posture Kinematic Model (PKM)*: the simplest state model which gives a global description of the mobile robot (useful for control). Posture  $= (x, y, \theta)$  in most of the case.
  - ☞ *Configuration Kinematic Model (CKM)*: all the configuration variables (posture + angular position of wheel, ...).
- 2 Dynamical model (idem + dynamics induced by actuators (most of the time electrical motors))
  - ☞ **Configuration Dynamic Model (CDM)** : include dynamics of the mobile robots and torques and forces generated by the actuators.
  - ☞ *Posture Dynamic Model (PDM)* : equivalent to (CDM) in order to get the EDO (CDM) + 1  $\int$  before each  $F, \tau$ .

Types of models: see [?] “Theory of Robot Control”, C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin (Eds).

- ① Kinematic model (take into account non holonomic constraints)
  - ☞ *Posture Kinematic Model (PKM)*: the simplest state model which gives a global description of the mobile robot (useful for control). Posture  $= (x, y, \theta)$  in most of the case.
  - ☞ *Configuration Kinematic Model (CKM)*: all the configuration variables (posture + angular position of wheel, ...).
- ② Dynamical model (idem + dynamics induced by actuators (most of the time electrical motors))
  - ☞ *Configuration Dynamic Model (CDM)* : include dynamics of the mobile robots and torques and forces generated by the actuators.
  - ☞ *Posture Dynamic Model (PDM)* : equivalent to (CDM) in order to get the EDO (CDM) + 1  $\int$  before each  $F, \tau$ .

Types of models: see [?] “Theory of Robot Control”, C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin (Eds).

- 1 Kinematic model (take into account non holonomic constraints)
  - ☞ *Posture Kinematic Model (PKM)*: the simplest state model which gives a global description of the mobile robot (useful for control). Posture  $= (x, y, \theta)$  in most of the case.
  - ☞ *Configuration Kinematic Model (CKM)*: all the configuration variables (posture + angular position of wheel, ...).
- 2 Dynamical model (idem + dynamics induced by actuators (most of the time electrical motors))
  - ☞ *Configuration Dynamic Model (CDM)* : include dynamics of the mobile robots and torques and forces generated by the actuators.
  - ☞ *Posture Dynamic Model (PDM)* : equivalent to (CDM) in order to get the EDO (CDM) + 1  $\int$  before each  $F, \tau$ .

Types of models: see [?] “Theory of Robot Control”, C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin (Eds).

- 1 Kinematic model (take into account non holonomic constraints)
  - ☞ *Posture Kinematic Model (PKM)*: the simplest state model which gives a global description of the mobile robot (useful for control). Posture  $= (x, y, \theta)$  in most of the case.
  - ☞ *Configuration Kinematic Model (CKM)*: all the configuration variables (posture + angular position of wheel, ...).
- 2 Dynamical model (idem + dynamics induced by actuators (most of the time electrical motors))
  - ☞ *Configuration Dynamic Model (CDM)* : include dynamics of the mobile robots and torques and forces generated by the actuators.
  - ☞ *Posture Dynamic Model (PDM)* : equivalent to (CDM) in order to get the EDO (CDM) + 1  $\int$  before each  $F, \tau$ .

## Kinematic model is enough

Generally it is sufficient to use a kinematic model which includes *non holonomic constraints* this is non integrable constraints of the form

$$\dot{q} = B(q)u, \quad (42)$$

where  $u \in R^m$ ,  $q \in R^n$  ( $n > m$ ).

☞ If not under-actuated (with respect to the mobility degree) then one can perform a **feedback linearization** :

$$J(q)\dot{u} + C(q, u)u + G(q) = B^T(q)D(q)\Gamma,$$

leads to

$$\dot{u} = v$$

by using  $\Gamma = (B^T(q)D(q))^{-1} (J(q)v + C(q, u)u + G(q))$ .